Liczby zespolone 2

1 Wiedząc, że pole elektryczne $\mathbf{E} = \mathrm{Re}\left[\hat{\mathbf{E}}e^{i\omega t}\right]$ i pole magnetyczne $\mathbf{H} = \mathrm{Re}\left[\hat{\mathbf{H}}e^{i\omega t}\right]$ fali poruszającej się w wolnej przestrzeni, dane są jako

$$\mathbf{E} = 25\cos\left(\omega t + \frac{2\pi}{5}z\right)\mathbf{i}\ \text{(V/m) oraz}\ \mathbf{H} = \frac{25}{2\pi}\cos\left(\omega t + \frac{2\pi}{5}z\right)\mathbf{j}\ \text{(A/m)},$$

znajdź wielkość i kierunek wektora wskazowego Poyntinga $\hat{\mathbf{S}} = \hat{\mathbf{E}} \times \hat{\mathbf{H}}^*$, gdzie $\hat{\mathbf{E}}$ i $\hat{\mathbf{H}}$ są odpowiednio wektorami wskazowymi natężenia pola elektrycznego i magnetycznego.

Wskazówka: wektor wskazowy to liczba zespolona, która wyraża amplitudę i fazę wyrażenia sinusoidalnego.

Odpowiedź **Rozwiązanie**

2 Wykaż, że dla sinusoidalnie zmiennych w czasie pól elektrycznego i magnetycznego uśredniony w czasie wektor Poyntinga $\langle\mathbf{S}\rangle$ można obliczyć wg wzoru

$$\langle\mathbf{S}\rangle = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left[\hat{\mathbf{S}}\right],$$

gdzie $\hat{\mathbf{S}}$ jest wektorem wskazowym Poyntinga określonym jako iloczyn wektorowy wektorów wskazowych natężenia pola elektrycznego i magnetycznego

$$\hat{\mathbf{S}} = \hat{\mathbf{E}} \times \hat{\mathbf{H}}^*,$$

wiedząc, że $\mathbf{E} = \mathrm{Re}\,(\hat{\mathbf{E}}e^{i\omega t})$, gdzie wektor o stałej zespolonej amplitudzie $\hat{\mathbf{E}}$ jest zdefiniowany jako wektor wskazowy pola elektrycznego i podobna definicja dotyczy wektora wskazowego pola magnetycznego.

Wskazówka: Średnia czasowa sygnału sinusoidalnego $Ae^{i\omega t}$ dana jest jako

$$\langle Ae^{i\omega t}\rangle = \frac{\displaystyle\int_0^T Ae^{i\omega t}\,\mathrm{d}t}{\displaystyle\int_0^T \mathrm{d}t}, \text{ gdzie } T = \frac{2\pi}{\omega}.$$

Rozwiązanie

Odpowiedzi

1 $\hat{\mathbf{S}} = \dfrac{625}{2\pi}\mathbf{k}\ \text{W/m}^2$

Pytanie | Rozwiązanie

Rozwiązania

1 Ponieważ $\mathbf{E} = \text{Re}\left[\hat{\mathbf{E}}e^{i\omega t}\right] = 25\cos\left(\omega t + \dfrac{2\pi}{5}z\right)\mathbf{i} = \text{Re}\left[25e^{2\pi iz/5}\,\mathbf{i}\,e^{i\omega t}\right]$,
zatem $\hat{\mathbf{E}} = 25e^{2\pi iz/5}\,\mathbf{i}$

Ponieważ $\mathbf{H} = \text{Re}\left[\hat{\mathbf{H}}e^{i\omega t}\right] = \dfrac{25}{2\pi}\cos\left(\omega t + \dfrac{2\pi}{5}z\right)\mathbf{j} = \text{Re}\left[\dfrac{25}{2\pi}e^{2\pi iz/5}\,\mathbf{j}\,e^{i\omega t}\right]$,
zatem $\hat{\mathbf{H}} = \dfrac{25}{2\pi}e^{2\pi iz/5}\mathbf{j}$.

Teraz możemy obliczyć wektor wskazowy Poyntinga:

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{S}} &= \hat{\mathbf{E}} \times \hat{\mathbf{H}}^* \\ &= \left(25e^{2\pi iz/5}\,\mathbf{i}\right) \times \left(\frac{25}{2\pi}e^{2\pi iz/5}\,\mathbf{j}\right)^* \\ &= \frac{25\cdot 25}{2\pi}e^{2\pi iz/5}e^{-2\pi iz/5}\,\mathbf{i}\times\mathbf{j} \\ &= \frac{625}{2\pi}\mathbf{k}\ \text{W/m}^2\end{aligned}$$

Pytanie | Odpowiedź

2 Pola elektryczne i magnetyczne $\mathbf{E}$ i $\mathbf{H}$ są wyrażone za pomocą wektorów wskazowych $\hat{\mathbf{E}}$ i $\hat{\mathbf{H}}$ oraz ich sprzężeń zespolonych $\hat{\mathbf{E}}^*$ i $\hat{\mathbf{H}}^*$:

$$\mathbf{E} = \text{Re}\left[\hat{\mathbf{E}}e^{i\omega t}\right] = \frac{1}{2}\left(\hat{\mathbf{E}}e^{i\omega t} + \hat{\mathbf{E}}^*e^{-i\omega t}\right)$$

oraz

$$\mathbf{H} = \text{Re}\left[\hat{\mathbf{H}}e^{i\omega t}\right] = \frac{1}{2}\left(\hat{\mathbf{H}}e^{i\omega t} + \hat{\mathbf{H}}^*e^{-i\omega t}\right).$$

Wektor Poyntinga $\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H}$ oraz wektor wskazowy Poyntinga $\hat{\mathbf{S}} = \hat{\mathbf{E}} \times \hat{\mathbf{H}}^*$ są dane jako

$$\begin{aligned}
\mathbf{S} &= \mathbf{E} \times \mathbf{H} \\
&= \frac{1}{2}\left(\hat{\mathbf{E}} e^{i\omega t} + \hat{\mathbf{E}}^* e^{-i\omega t}\right) \times \frac{1}{2}\left(\hat{\mathbf{H}} e^{i\omega t} + \hat{\mathbf{H}}^* e^{-i\omega t}\right) \\
&= \frac{1}{4}\left(\hat{\mathbf{E}} \times \hat{\mathbf{H}}^* + \hat{\mathbf{E}}^* \times \hat{\mathbf{H}}\right) + \frac{1}{4}\left(\hat{\mathbf{E}} \times \hat{\mathbf{H}} e^{i2\omega t} + \hat{\mathbf{E}}^* \times \hat{\mathbf{H}}^* e^{-i2\omega t}\right) \\
&= \frac{1}{4}\left(\hat{\mathbf{E}} \times \hat{\mathbf{H}}^* + \left[\hat{\mathbf{E}} \times \hat{\mathbf{H}}^*\right]^*\right) + \frac{1}{4}\left(\hat{\mathbf{E}} \times \hat{\mathbf{H}} e^{i2\omega t} + \left[\hat{\mathbf{E}} \times \hat{\mathbf{H}}\right]^* e^{-i2\omega t}\right),
\end{aligned}$$

ponieważ $\left(\hat{\mathbf{E}} \times \hat{\mathbf{H}}^*\right)^* = \hat{\mathbf{E}}^* \times \hat{\mathbf{H}}$ oraz $\hat{\mathbf{E}}^* \times \hat{\mathbf{H}}^* = \left(\hat{\mathbf{E}} \times \hat{\mathbf{H}}\right)^*$.
Zatem

$$\mathbf{S} = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left(\hat{\mathbf{E}} \times \hat{\mathbf{H}}^*\right) + \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left(\hat{\mathbf{E}} \times \hat{\mathbf{H}} e^{i2\omega t}\right).$$

Teraz wyznaczymy uśredniony w czasie wektor Poyntinga:

$$\langle \mathbf{S} \rangle = \left\langle \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left(\hat{\mathbf{E}} \times \hat{\mathbf{H}}^*\right) \right\rangle + \left\langle \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left(\hat{\mathbf{E}} \times \hat{\mathbf{H}} e^{i2\omega t}\right) \right\rangle.$$

Dalej:

$$\begin{aligned}
\left\langle \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left(\hat{\mathbf{E}} \times \hat{\mathbf{H}}^*\right) \right\rangle &= \frac{\int_0^T \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left(\hat{\mathbf{E}} \times \hat{\mathbf{H}}^*\right) \mathrm{d}t}{\int_0^T \mathrm{d}t} \\
&= \frac{\frac{1}{2}\mathrm{Re}\left(\hat{\mathbf{E}} \times \hat{\mathbf{H}}^*\right) \int_0^T \mathrm{d}t}{\int_0^T \mathrm{d}t} \\
&= \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left(\hat{\mathbf{E}} \times \hat{\mathbf{H}}^*\right) \\
&= \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left(\hat{\mathbf{S}}\right)
\end{aligned}$$

oraz:

$$\left\langle \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left(\hat{\mathbf{E}}\times\hat{\mathbf{H}}e^{i2\omega t}\right)\right\rangle = \frac{\displaystyle\int_0^{2\pi/\omega}\frac{1}{2}\mathrm{Re}\left(\hat{\mathbf{E}}\times\hat{\mathbf{H}}e^{i2\omega t}\right)\mathrm{d}t}{\displaystyle\int_0^{2\pi/\omega}\mathrm{d}t}$$

$$= \frac{\frac{1}{2}\mathrm{Re}\left(\hat{\mathbf{E}}\times\hat{\mathbf{H}}\right)\left[\frac{e^{i2\omega t}}{i2\omega}\right]_0^{2\pi/\omega}}{2\pi/\omega}$$

$$= \frac{\frac{1}{2}\mathrm{Re}\left(\hat{\mathbf{E}}\times\hat{\mathbf{H}}\right)\left(e^{i4\pi}-1\right)}{4\pi i}$$

$$= 0 \text{ ponieważ } e^{i4\pi} = 1.$$

Zatem

$$\langle\mathbf{S}\rangle = \frac{1}{2}\mathrm{Re}(\hat{\mathbf{S}}) + 0.$$

Pytanie